FÍSICA TEMA 1 : CINEMÁTICA Y DINÁMICA

1-MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES. CÁLCULO VECTORIAL BÁSICO
2-CINEMÁTICA. MAGNITUDES FUNDAMENTALES PARA EL ESTUDIO DEL MOVIMIENTO.
3-CLASIFICACIÓN DE MOVIMIENTOS.
4-COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS. PROYECTILES.

1-MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES .CÁLCULO VECTORIAL BÁSICO.

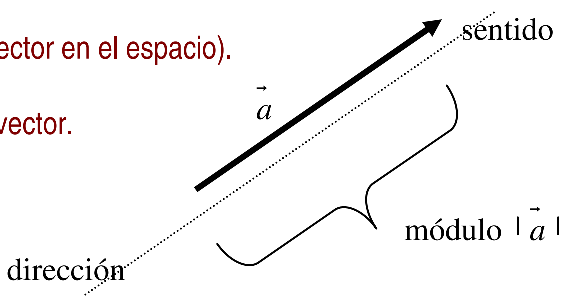
Magnitud física es todo aquello que se puede medir y según sus características se dividen en dos grandes grupos:
MAGNITUDES ESCALARES: son aquellas que quedan perfectamente determinadas por su número que expresa su medida y su unidad correspondiente que sirve para identificar a qué magnitud pertenece un valor numérico dado. Se llaman escalares porque se suelen representar mediante escalas numéricas.

MAGNITUDES VECTORIALES: son aquellas que para definirlas completamente no basta con el número que expresa su medida, necesitamos indicar además una dirección y un sentido. Por esa razón se expresan mediante vectores.

MAGNITUD	UNIDAD (S.I.)	APARATO DE MEDIDA	ESCALAR	VECTORIAL
fuerza				
masa				
longitud				
velocidad				
aceleración				
peso				
temperatura				
tiempo				
desplazamiento				
volumen				

Un vector es simplemente un segmento orientado.

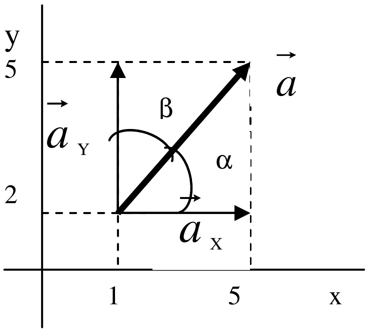
Los vectores se representan gráficamente como segmentos acabados en una flecha y quedan perfectamente determinados si se conoce:
-**Módulo:** longitud del vector.
-**Dirección:** recta a que pertenece (inclinación del vector en el espacio).
-**Sentido:** indicado mediante la flecha.
-**Origen o punto de aplicación :** donde empieza el vector.



Aplicado esto a la física el módulo es el valor numérico de la magnitud que se mide.

El Álgebra vectorial es un instrumento muy empleado en Física y conviene manejarlo con soltura.
Si representamos un vector respecto a los típicos ejes cartesianos (x,y si estamos en un plano o x,y,z si estamos en el espacio).
Tomando el caso más sencillo , en un plano, quedaría el vector representado por un par de números que son **su proyección sobre cada uno de los ejes** y reciben el nombre de **COMPONENTES.**

Como se puede ver **las COMPONENTES DE UN VECTOR se obtienen restando las coordenadas del extremo del vector (donde está la flecha) menos las del origen o punto de aplicación del vector.**
Para calcular el MÓDULO del vector basta con aplicar Pitágoras.



En x 5-1=4 luego la componente x es 4
En y 5-2=3 luego la componente y es 3

El módulo queda: $\sqrt{\left(a_X^2 + a_Y^2\right)} = \sqrt{\left(4^2 + 3^2\right)}$=5

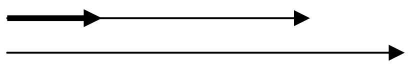
Los ángulos serán: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{a_Y}{a}$ $\qquad \cos\alpha = \frac{a_X}{a}$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{a_X}{a} \qquad \cos\beta = \frac{a_Y}{a}$$

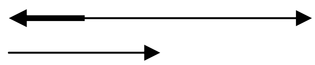
Los vectores se pueden sumar y restar.
Sumar un vector es hallar otro vector llamado RESULTANTE que produzca los mismos efectos que los vectores sumados si actuasen simultáneamente.

Para realizar la suma de vectores completa hay que hacerla numérica y gráficamente. Numéricamente se calcula el módulo del vector resultante, mientras que gráficamente se dibuja el vector resultante según su dirección y sentido, para realizar la suma de vectores correctamente se deben hacer ambas cosas.
Para sumar varios vectores lo primero que hay que hacer es hacer coincidir sus orígenes.

-<u>Si se trata de vectores paralelos entre si (igual dirección) puede ocurrir que:</u>
a)Vayan en el mismo sentido con lo que basta con sumar sus módulos.
b)Vayan en sentidos contrarios, con lo cual sus efectos se oponen y por lo tanto se restan sus módulos y el vector resultante va en el sentido del mayor de ellos.



$\vec{a} + \vec{b}$

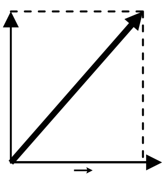


$\vec{a} - \vec{b}$

Así se observa que con vectores la resta es en realidad una suma en la que a uno de los vectores se le ha cambiado de sentido, al que lleva el signo menos delante.
EL SIGNO DELANTE DE UN VECTOR INDICA SU SENTIDO, UN SIGNO MENOS DELANTE DEL VECTOR (es como multiplicarlo por –1) CAMBIA SU SENTIDO.

-<u>Si se trata de vectores perpendiculares</u> entre si es fácil tanto la suma como la resta ya que se sigue **LA REGLA DEL PARALELOGRAMO** y el **Teorema de Pitágoras** para hacer los cálculos.

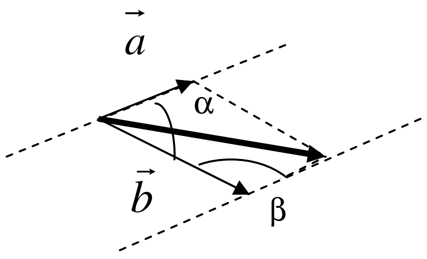
$\vec{a}$



$\vec{b}$

$\sqrt{\left(a^2 + b^2\right)}$

-**<u>Si los vectores forman entre si un ángulo cualquiera</u>** se sigue empleando la regla del paralelogramo para hacer el dibujo pero para los cálculos hay que utilizar el **Teorema del coseno** (hay que tener en cuenta que el Teorema de Pitágoras es un caso particular del Teorema del coseno).



Teorema del coseno: $r^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos\beta$

como $\alpha + \beta = 180°$ entonces $\cos\alpha = -\cos\beta$

Luego $r^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b.\cos\alpha$ siendo α el ángulo entre los dos vectores

Por ejemplo :si el módulo de $\vec{a}$ es 4 y el de $\vec{b}$ es 7 y el ángulo entre ellos 30° la resultante es:

$$\sqrt{(4^2 + 7^2 + 2.4.7.\cos 30°)} = 10{,}65$$

Conociendo las componentes de los vectores que se quiere sumar resulta mucho más fácil ya que basta con sumar las componentes, componente a componente y el módulo del vector resultante se obtiene a partir de las componentes resultantes. Restar sería restar las componentes.

Curiosamente, cuando se trata de vectores, la operación contraria a sumar no es restar (que es como sumar pero cambiando de sentido al vector que lleva el signo menos) la operación contraria es **DESCOMPONER**.

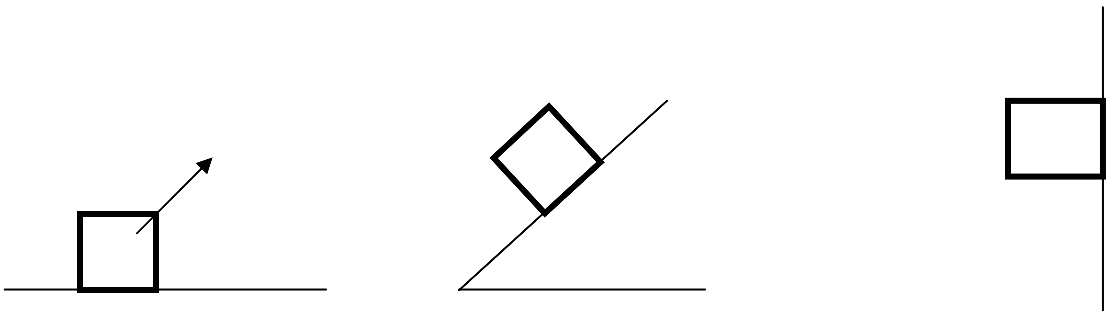
La **DESCOMPOSICIÓN DE UN VECTOR ES HALLAR UN SISTEMA DE VECTORES QUE PRODUZCA EL MISMO EFECTO QUE EL VECTOR DADO.**

El caso más corriente en física es la descomposición de un vector en dos componentes normales (perpendiculares entre si). Estas componentes son la proyección del vector sobre unos ejes previamente definidos.

Lo más corriente cuando se trabaja en un plano y hay una superficie de movimiento es tomar los ejes respecto a dicha superficie y entonces se toma eje y perpendicular a la superficie y el eje x paralelo a la misma.

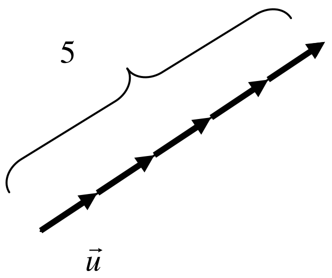
Se llama COMPONENTE UTIL a la que coincide con la dirección en que se produce el movimiento o el efecto correspondiente.

Dibujar los ejes y determinar las componentes en cada caso:



Los vectores se pueden multiplicar y dividir por números (escalares) **el producto o el cociente de un vector por un número es SIEMPRE otro vector, que tiene la misma dirección que el primero y cuyo módulo es igual al producto o al cociente del módulo del vector por el escalar(número).**

Algo muy útil en Física son los llamados **VECTORES UNITARIOS.** . Es evidente que un vector unitario es aquel cuyo módulo es 1 pero ¿como se puede hacer que un vector sea unitario?.



Si este vector a tiene, por ejemplo de componentes (3,4) su módulo es:

$$a = \sqrt{\left(3^2 + 4^2\right)} = 5$$

El vector unitario sale de dividir a entre su modulo por lo tanto tiene de componentes (3/5, 4/5) que haciendo el módulo queda:

$$\vec{u} = \sqrt{\left(\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2\right)} = 1$$

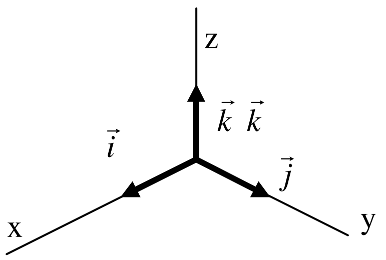
SE OBTIENE UN VECTOR UNITARIO DIVIDIENDO UN VECTOR ENTRE SU PROPIO MÓDULO. $\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Entonces todo vector se puede representar como:
- Su módulo, que indica su valor numérico.
- Un vector unitario que indica la dirección.
- Un signo (+ o -) que indica el sentido.

$$\vec{a} = \pm|\vec{a}|.\vec{u}$$ por ejemplo $\vec{a} = 5.\vec{u}$

De todos los posibles vectores unitarios , en todas las posibles direcciones del espacio los que usarás con más frecuencia son los que se sitúan en los ejes cartesianos de referencia ya que sirven para identificar las componentes de un vector.

El vector unitario en la dirección del eje x se llama i ,el que se sitúa sobre el eje y se llama j y el que se sitúa sobre el eje z se llama k.



Si escribimos $\vec{a} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ significa que este vector tiene como componentes sobre el eje x 5 , sobre el eje y 3 y sobre el eje z 2 o lo que es lo mismo que si colocamos su origen en el origen de coordenadas su extremo estaría en el punto (5,3,2)

Los vectores también se pueden multiplicar entre si y hay dos tipos de productos **PRODUCTO ESCALAR** da como resultado un escalar (un número) y **PRODUCTO VECTORIAL** da como resultado un vector.
También se pueden **derivar** vectores simplemente derivando cada una de sus componentes.

Ejemplo 1: Siendo el vector $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$ dibújalo en el sistema de ejes ,¿cuales son sus componentes? ¿que ángulo forma con cada eje? ¿ cual es su módulo?. Obtén un vector unitario en la dirección de $\vec{a}$.

Ejemplo 2: Siendo $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$,$\vec{b} = 4\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ y $\vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{k}$ haz las siguientes operaciones: $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; $2\vec{b} + \vec{c}$; $\dfrac{\vec{c}}{2}$ y calcula los módulos de los vectores resultantes

Ejemplo3. Siendo $\vec{a} = (2t^2 + 1)\vec{i} + 5t\vec{j} + \vec{k}$ determina la derivada de a respecto a t. El vector cuando t=1 s y su módulo. El vector derivada de $\vec{a}$ cuando t=1 y su módulo.

2-CINEMÁTICA. MAGNITUDES FUNDAMENTALES PARA EL ESTUDIO DEL MOVIMIENTO.

La **Cinemática** es una parte de la Mecánica, que estudia el movimiento sin tener en cuenta las causas que lo producen.

Cuándo se mueven los cuerpos describiendo una trayectoria, pueden, al mismo tiempo, girar, vibrar... Estos movimientos superpuestos al de traslación dificultan el estudio del movimiento. Para evitar inicialmente estas complicaciones se considera que los cuerpos que se mueven son partículas materiales, **SE CONSIDERA AL CUERPO EN MOVIMIENTO COMO UN PUNTO MATERIAL QUE NO TIENE DIMENSIONES Y CUYA MASA ES LA MASA TOTAL DEL CUERPO**. Matemáticamente una partícula es un punto sin dimensiones y, por tanto, no puede tener ni rotaciones ni vibraciones, esta es la forma de estudiar exclusivamente la traslación de un cuerpo sin más complicación.

Decimos que un cuerpo está en movimiento cuando cambia su posición en el espacio con respecto a un determinado **SISTEMA DE REFERENCIA**, que normalmente se considera fijo, y decimos que está en reposo si su posición respecto a dicho sistema de referencia no cambia.
¿Qué es un sistema de referencia? realmente siempre que realizamos cualquier medida la hacemos respecto a algo y decimos por ejemplo "desde donde yo estoy hasta la puerta hay 2 m" al decir esto nos estamos tomando a nosotros mismos como referencia.
Entonces **el reposo y el movimiento son conceptos relativos** ya que dependen del sistema de referencia que tomemos, así una casa se encuentra en reposo respecto a nosotros y respecto a la Tierra que está en movimiento en torno al Sol, pero respecto al Sol estaría en movimiento junto con la Tierra y si vemos esta casa desde un tren en marcha parece que se mueve respecto a nosotros.

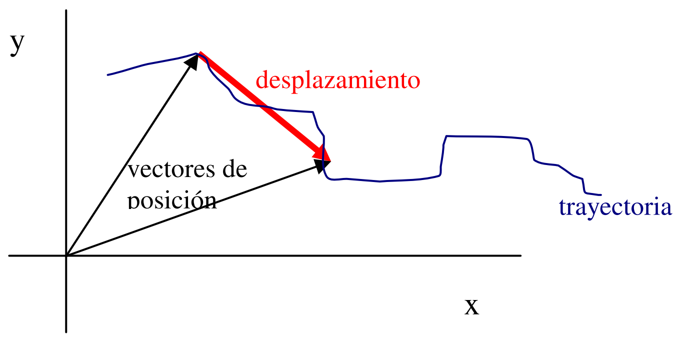
PARA DESCRIBIR PERFECTAMENTE UN MOVIMIENTO HACE FALTA INDICAR RESPECTO A QUÉ SISTEMA DE REFERENCIA SE HAN REALIZADO LAS MEDIDAS.

a) DESPLAZAMIENTO Y TRAYECTORIA:

La trayectoria depende del Sistema de Referencia escogido.

Se denomina **Trayectoria** al camino seguido por el móvil en su movimiento. Es escalar
El espacio (S) que recorre un cuerpo en su movimiento se define como la longitud de la trayectoria recorrida y es también un escalar. Se mide en metros

Para describir cinemáticamente el movimiento de una partícula es necesario conocer su posición en cualquier instante. Por tanto, es un problema estrechamente relacionado con las nociones de tiempo y espacio.
Para situar la posición de una partícula se suele elegir un sistema de referencia formado por tres ejes perpendiculares entre sí, x,y,z, y dibujar un vector que tenga como origen el sistema de referencia y como extremo la posición de la partícula en cada instante. Si en lugar de trabajar en tres dimensiones trabajamos en un plano sólo sería un sistema de referencia x,y.



Los vectores de posición determinan las diferentes posiciones del movimiento podemos llamarlos r_1 y r_2 si consideramos las posiciones como posición 1 y posición 2.
r_1-r_2=Δr mide la variación de posición (incremento) es decir la diferencia entre la posición final y la inicial y determina el desplazamiento del móvil

El vector $\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ (posición final menos posición inicial) se denomina **vector desplazamiento.**
Su módulo representa la distancia entre dos posiciones que ocupa el cuerpo durante el movimiento.

Se define **vector desplazamiento** como la distancia entre dos puntos inicial y final del recorrido. Se calcula restando los vectores de posición final e inicial. Se mide en metros

El vector $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z.\vec{k}$ definido en cada punto se denomina vector de posición. **VECTOR DE POSICIÓN ES EL VECTOR QUE UNE EL ORIGEN DEL SISTEMA DE REFERENCIA CON LA POSICIÓN EN QUE SE ENCUENTRA EL CUERPO EN CADA MOMENTO.**

La partícula se mueve variando de posición con el tiempo, por lo tanto el vector de posición es una función del tiempo $\vec{r} = \vec{r}(t)$

Conocer $\vec{r}(t)$ es conocer el movimiento desde un punto de vista cinemático.

El desplazamiento de un cuerpo que se mueve no tiene por que coincidir con la distancia recorrida ΔS sobre la trayectoria. Esta es siempre mayor y sólo se igualan cuando el movimiento es rectilíneo. **El módulo del vector desplazamiento en un movimiento rectilíneo es igual al espacio recorrido según la trayectoria.**

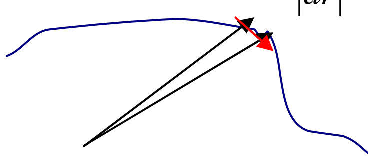
Ejemplo: Calcula la distancia recorrida por un cuerpo que se mueve en línea recta según los vectores de posición $\vec{r}_1 = 5\vec{i} + 4\vec{j}$ y $\vec{r}_2 = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ tomadas las posiciones en metros. Haz el dibujo .

El desplazamiento es el vector que une dos puntos de la trayectoria del móvil (recta que une dos posiciones de su movimiento, en el sentido de su movimiento) por lo tanto es una magnitud vectorial mientras que la trayectoria describe el camino seguido por el móvil en su movimiento, que puede ser rectilíneo, circular ,en zig-zag, ondulatorio, oscilatorio, por lo que la trayectoria no es una magnitud vectorial.

Pero el desplazamiento y la trayectoria no sólo coinciden cuando el movimiento es rectilíneo sino también cuando estudiamos desplazamientos muy pequeñitos , infinitesimales o diferenciales:

EL MOVIMIENTO DE CUALQUIER MÓVIL QUEDA PERFECTAMENTE DETERMINADO SI SE CONOCE COMO VARIAN LAS COMPONENTES DEL VECTOR DESPLAZAMIENTO EN FUNCIÓN DEL TIEMPO

$$|d\vec{r}| = dS$$



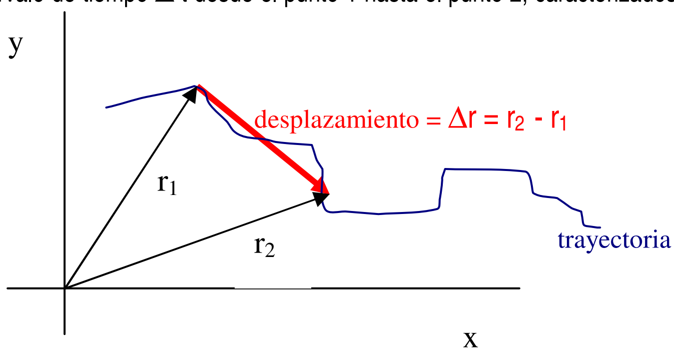
b) VELOCIDAD:

La velocidad es la magnitud física que estudia la variación de la posición de un cuerpo en función del tiempo respecto a un determinado sistema de referencia. Sus unidades por tanto son: m/s cm/s o Km / h etc...

Supongamos que cierto punto P se traslada en un intervalo de tiempo Δt desde el punto 1 hasta el punto 2, caracterizados por los vectores de posición $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$:

Se define velocidad media como el cambio de posición de un cuerpo en un intervalo de tiempo:

$$\vec{V}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1}$$



La dirección y sentido de la velocidad media coincide con $\Delta \mathbf{r}$ (vector desplazamiento). **PUESTO QUE EL COCIENTE ENTRE UN VECTOR Y UN NÚMERO DA SIEMPRE OTRO VECTOR ESTÁ CLARO QUE LA VELOCIDAD VA A SER UN VECTOR.**

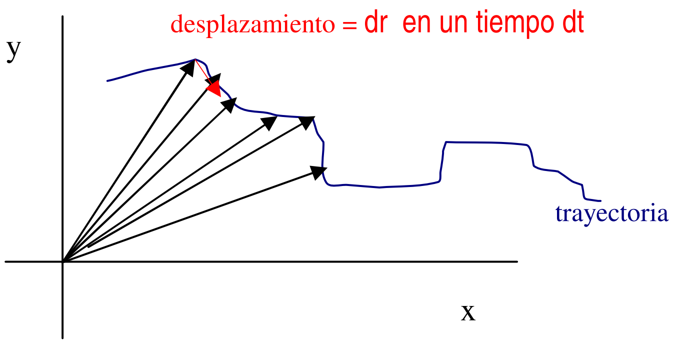
En ocasiones también se puede calcular la velocidad media respecto de la trayectoria S entre dos posiciones inicial y final (es decir también en un intervalo) es lo que en algunos libros se llama celeridad o rapidez aunque es preferible llamarlo velocidad media respecto de la trayectoria. **<u>En este caso es un escalar.</u>**

Rapidez: espacio recorrido por intervalo de tiempo

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}$$

La Velocidad Instantánea se define como la velocidad que lleva un móvil en un instante de tiempo determinado.

Pero ¿como podemos obtener la velocidad de un móvil en un instante?. Esto a simple vista es bastante difícil ya que equivaldría a hacer una "foto" al móvil en un instante y obtener de alguna manera su velocidad, se trataría de obtener cambios instantáneos de posición y el tiempo que tardó en estos cambios instantáneos (un instante) prácticamente imposible de medir de forma directa.
Debemos recurrir a aproximaciones si queremos saber la velocidad de un móvil en un punto determinado, el truco consiste en ir tomando puntos cada vez más próximos a aquel cuya velocidad queremos medir, calculando cada vez la velocidad media entre esos puntos, al irnos acercando cada vez más al punto que queremos medir, el intervalo en que calculamos la velocidad media es cada vez más pequeño, con lo que las variaciones se convierten en diferenciales. La operación que estamos haciendo es **una derivada.**



La velocidad instantánea es el cambio de posición de un cuerpo en movimiento en cada instante.

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$$

Este vector velocidad instantánea es tangente a la trayectoria y su sentido es el del movimiento.

Si tenemos en cuenta que tanto Δr como Δt están ligados al camino recorrido ΔS, y que cuando el cambio es diferencial el módulo (valor numérico) de dr es igual que dS la expresión de la velocidad puede desarrollarse en la forma siguiente:
Por supuesto en módulo.

$$V = \frac{dr}{dt} = \frac{dS}{dt}$$

Ejemplo 1: Siendo la ecuación de un movimiento S=3t²+5t-1 m calcula la velocidad entre t=1 y t=2 s y la velocidad para t=2 s.

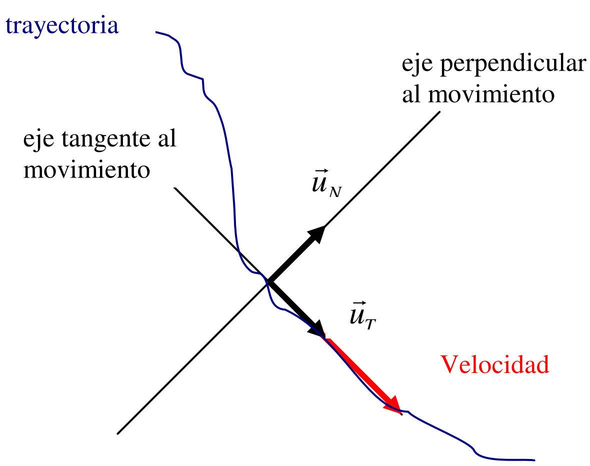
Ejemplo 2: El vector de posición de un móvil es $\vec{r} = (3t+2)\vec{i} + 5t^2\vec{j} - 6\vec{k}$ (m) calcula lo mismo que en el caso anterior ¿cual es la diferencia?.

Conociendo el vector de posición en función del tiempo ¿se puede saber la trayectoria del móvil y la ecuación del movimiento, S en función de t?. Y ¿conociendo la ecuación del movimiento se puede determinar la trayectoria y el vector de posición en función del tiempo?. Piénsalo.

Puesto que la velocidad instantánea es un vector tangente a la trayectoria en cada punto, cuyo sentido es el del movimiento, a partir de ella se podría obtener **un vector unitario tangente a la trayectoria en cada punto** y según el sentido del movimiento, que nos puede ser de mucha utilidad. ¿Recuerdas como se obtenían vectores unitarios?.

$u_T = \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$ **luego** $|\vec{V}|.u_T = \vec{V}$

Por tanto: $\vec{V} = |\vec{V}|.u_T$ recuerda que un vector se representa por un signo + o - que indica su sentido, un número que indica su módulo y un vector unitario que indica su dirección respecto al sistema de referencia que utilicemos, en este caso hemos cambiado de sistema de referencia y estamos usando uno respecto a la trayectoria (según sea tangente o perpendicular a ella) y no un sistema exterior x, y,z lo que implicaría usar como vectores unitarios $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$



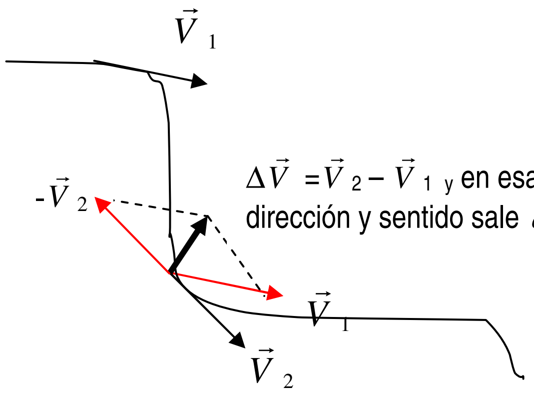
Se define la aceleración cómo la variación de la velocidad respecto al tiempo. Sus unidades por tanto serán m/s^2 o Km/h^2 etc...
Siempre que un cuerpo varía su velocidad ya sea en módulo, dirección o sentido hay aceleración.

COMO EL COCIENTE DE UN VECTOR ENTRE UN NÚMERO ES SIEMPRE OTRO VECTOR ESTÁ CLARO QUE LA ACELERACIÓN ES UNA MAGNITUD VECTORIAL.
Igual que hacíamos con la velocidad se pueden considerar dos tipos de aceleración según estudiemos el movimiento en un intervalo o en un punto.

La aceleración media estudia el cambio de velocidad en un intervalo de tiempo.
Es un vector con la misma dirección y sentido que el vector resultante de restar la velocidad inicial y final vectorialmente ,en cierto Δt se define como :

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1}$$

Se trata por tanto de una **magnitud vectorial** con la dirección y sentido de $\Delta \vec{V}$.



$\Delta \vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$ y en esa misma dirección y sentido sale $\vec{a}_m$

Para conocer la aceleración en cada instante, necesitamos conocer intervalos de tiempo Δt cada vez mas pequeños.

La aceleración Instantánea mide el cambio de velocidad en un instante determinado del movimiento:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{V}}{dt}$$ es también una magnitud vectorial

d) COMPONENTES INTRÍNSECAS DE LA ACELERACIÓN

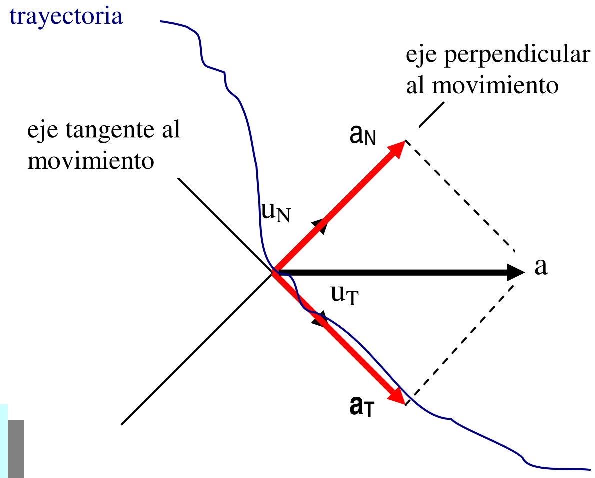
Si usamos el sistema de referencia en función de la trayectoria podemos descomponer la aceleración en dos componentes:
Recuerda que: $V = |V| \cdot u_T$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{d|\mathbf{V}| \cdot \mathbf{u}_T}{dt}$$ matemáticamente esto se deriva así:

$$\mathbf{a} = \frac{d|V|}{dt} \cdot u_T + |V| \cdot \frac{du_T}{dt}$$

aceleración tangencial (a_T) : cambio del módulo de la velocidad

aceleración normal (a_N): cambio de la dirección de la velocidad



$$\vec{a} = a_T \cdot \vec{u}_T + a_N \cdot \vec{u}_N$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

ACELERACIÓN TANGENCIAL: está claro que **ES TANGENTE A LA TRAYECTORIA** ya que queda multiplicado por el vector unitario tangente y su módulo se obtiene derivando el módulo de la velocidad respecto al tiempo.
Una derivada es un cambio instantáneo y si el módulo de la velocidad no cambiara ,fuera constante, su derivada sería cero y esta componente de la aceleración sería cero.
Luego **LA ACELERACIÓN TANGENCIAL ES UNA COMPONENTE DE LA ACELERACIÓN INSTANTÁNEA QUE ESTUDIA EL CAMBIO DEL MÓDULO DE LA VELOCIDAD RESPECTO AL TIEMPO.** Es la responsable del cambio de la magnitud velocidad, es decir, del módulo de la velocidad. Si $a_T = 0$ el módulo de la velocidad es constante; es decir el movimiento es uniforme.

En movimientos Uniformes donde la velocidad es constante en módulo no existe la aceleración tangencial.

LA OTRA COMPONENTE RECIBE EL NOMBRE DE ACELERACIÓN NORMAL PORQUE ES PERPENDICULAR A LA TRAYECTORIA:
LA ACELERACIÓN NORMAL ES UNA COMPONENTE DE LA ACELERACIÓN INSTANTÁNEA QUE ESTUDIA EL CAMBIO DE DIRECCIÓN DE LA VELOCIDAD RESPECTO AL TIEMPO.
Existe siempre que el movimiento es curvilíneo. Es la responsable del cambio de dirección de la velocidad. Si el movimiento es rectilíneo esta componente se hace cero. O lo que es lo mismo si $a_N = 0$ la dirección del vector velocidad es constante, es decir, el movimiento es rectilíneo.

$a_T = \dfrac{d\,|V|}{dt}$ (m /s²)

Se obtiene derivando el módulo de la velocidad

$a_N = \dfrac{V^2}{R}$ (m/s²)

Se obtiene con la velocidad, en un instante dado, al cuadrado entre el radio de giro

Con ver el valor del módulo (valor numérico) de la aceleración normal se comprende perfectamente ya que si el radio de giro $R = \infty$ entonces $a_N = 0$ y la trayectoria será rectilínea y la aceleración normal valdrá cero.

Ejemplo: Sea el vector de posición de un móvil r= 3 t i + 2t³ j +3 k m .Calcular Las componentes **Intrínsecas** de la aceleración cuando t=1 s y el radio de giro en ese instante.

3- CLASIFICACIÓN DE MOVIMIENTOS

Desde el punto de vista cinemático existen varios criterios para clasificar los movimientos.

Según la trayectoria
- **Rectilíneos:** cuándo su trayectoria es una línea recta. (No hay a_N.)
- **Curvilíneos:** cuándo su trayectoria es curva. Dentro de estos se encuentran movimientos tan importantes como: circular, elíptico, parabólico, ondulatorio...(Si hay a_N)

Según el módulo de la velocidad
- **Uniformes**: módulo de la velocidad constante (no hay a_T)
- **Variados (no uniformes):** varía el módulo de la velocidad (si hay a_T)

En función de la aceleración : esta es la clasificación más importante qué nos va a servir para recordar las características de los movimientos más comunes.

a) MOVIMIENTOS SIN ACELERACIÓN : MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORME (mru)

Como la trayectoria es recta, la velocidad no cambia en ningún momento de dirección y no hay aceleración normal.
Como es un movimiento uniforme la velocidad no cambia de valor (módulo) por lo que tampoco existe aceleración tangencial.
Luego este movimiento no tiene aceleración.
Al ser la trayectoria rectilínea el desplazamiento (r) y la trayectoria (S) coinciden.
Como la velocidad es constante la velocidad media y la instantánea coinciden.

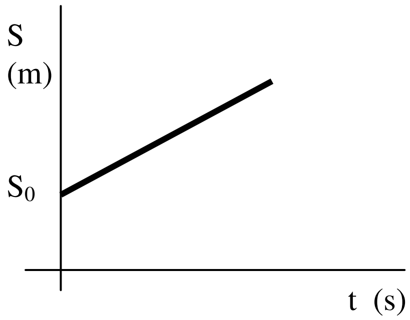
$$V = \frac{dr}{dt} = \frac{dS}{dt} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S - S_0}{t}$$

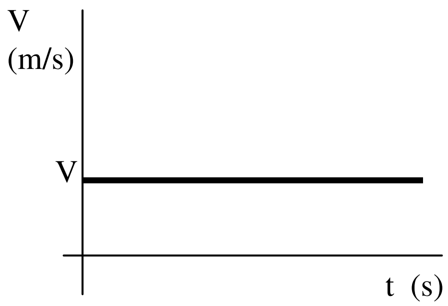
Ecuación del movimiento uniforme : $S = V \cdot t$

Si hay espacio inicial queda $S = V \cdot t + S_0$

Despejando $V \cdot t = S - S_0$ luego $V \cdot t + S_0 = S$

Las gráficas de un movimiento uniforme son :





La velocidad es la pendiente de la gráfica S/ t , cuanto más pendiente más velocidad

Es posible sacar la ecuación del movimiento a partir de área bajo la gráfica velocidad-tiempo: área = $V \cdot t$

b) MOVIMIENTOS CON EL MODULO DE LA ACELERACIÓN CONSTANTE :

-MOVIMIENTO RECTILINEO UNIFORMEMENTE ACELERADO (mrua)

Al ser un movimiento rectilíneo no tiene aceleración normal, pero la velocidad va cambiando en módulo (aceleramos o frenamos) y por lo tanto hay aceleración tangencial.

El ritmo de cambio de la velocidad es constante, la velocidad varía proporcionalmente al tiempo (a doble tiempo doble velocidad etc...) por lo que la aceleración es constante en módulo.

Además de ser constante el módulo de la aceleración, también es constante su dirección y el sentido, ya que el movimiento es rectilíneo. Como la a_T es constante y la única de este movimiento, la aceleración tangencial coincide con la aceleración media del movimiento ya que si la aceleración es constante es la misma en un punto que en un intervalo.

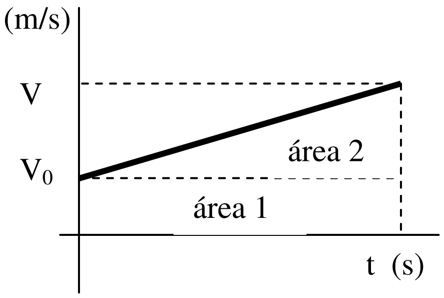
$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V - V_0}{t}$$

Como la trayectoria es rectilínea el desplazamiento y la trayectoria coinciden.

La ecuación del espacio también se puede obtener del área de la gráfica velocidad frente a tiempo igual que en el movimiento anterior.

Ecuación del movimiento uniformemente acelerado: $S = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ si hay espacio inicial S_0 se añade

Derivando se obtiene la velocidad $V = \frac{dS}{dt}$ $V = V_0 + a \cdot t$



área 1 = $V_0 \cdot t$

área 2 $= \frac{1}{2} \cdot (V - V_0) \cdot t$ como $a = \frac{V - V_0}{t}$ entonces $a \cdot t = (V - V_0)$

queda área 2 $= \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$

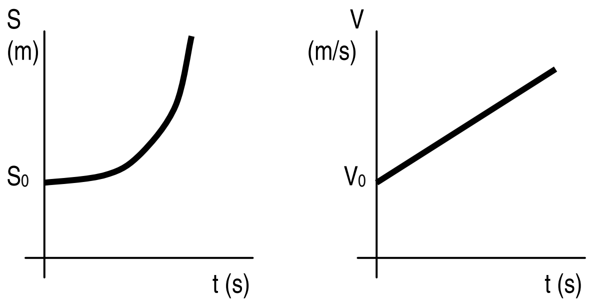
Luego el área total (que es el espacio recorrido es área1 + área2

$$S = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

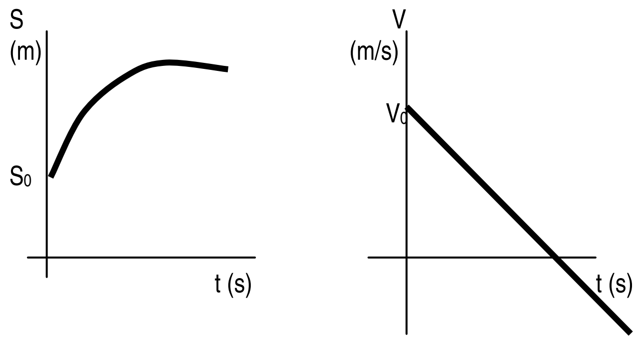
En este caso, debido a que todos los vectores tienen la misma dirección ya que se trata de un movimiento rectilíneo, estas ecuaciones pueden escribirse de forma escalar, utilizándose entonces los signos + y - para diferenciar el sentido.

Las gráficas de un movimiento uniformemente acelerado son:

ACELERACIÓN A FAVOR DEL MOVIMIENTO (acelerar)



ACELERACIÓN EN CONTRA DEL MOVIMIENTO. (frenar)

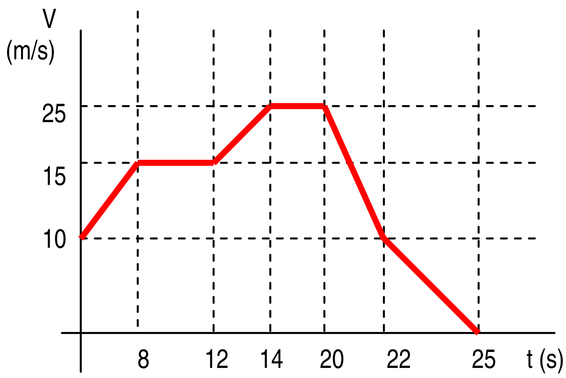


La aceleración es la pendiente de la gráfica velocidad –tiempo.

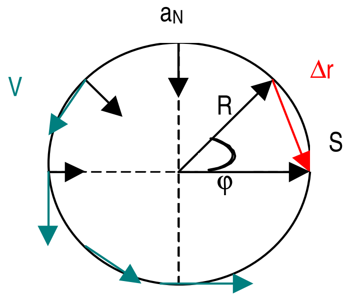
Si actúa una aceleración en contra del movimiento la velocidad del cuerpo disminuye y puede llegar a pararse, si dicha aceleración sigue actuando consigue que el cuerpo retroceda (es decir se ponga en marcha en sentido contrario al que llevaba)

El signo de la aceleración y de la velocidad depende del sistema de referencia que tomemos no de que el cuerpo acelere o frene.
Si consideramos positivo el sentido de avance del cuerpo una aceleración es negativa si va en contra del avance del cuerpo y positiva si va a favor.
Un cuerpo frena si su aceleración va en sentido contrario a la velocidad y acelera si ambas van en el mismo sentido.

Ejemplo 1: Interpreta esta gráfica y calcula el espacio recorrido por el móvil en cada etapa y el espacio total recorrido, calcula la aceleración en cada etapa.
Haz la gráfica espacio/ t



MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (mcu)



Al ser un movimiento uniforme el módulo de la velocidad es constante luego no hay aceleración tangencial.
Su trayectoria es una circunferencia por lo que el desplazamiento y la trayectoria no coinciden.
La velocidad va cambiando constantemente de dirección por lo que existe aceleración normal.
Si la única aceleración que existe es la normal y la aceleración es constante, la aceleración media es igual que la instantánea en su única componente en este caso que es la aceleración normal.

Al ser un movimiento uniforme su ecuación de movimiento es :

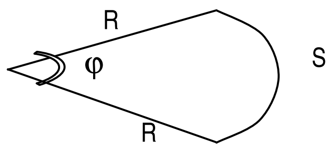
Ecuación del movimiento uniforme : $S = V \cdot t$ **Si hay espacio inicial queda $S = V \cdot t + S_0$**

Aceleración normal o centrípeta : $a_N = \dfrac{V^2}{R}$

Las gráficas de este movimiento serán las mismas que las de cualquier movimiento uniforme luego **A PARTIR DE LAS GRÁFICAS S/t Y V / t NO ES POSIBLE DISTINGUIR EL MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME DEL CIRCULAR UNIFORME YA QUE NO NOS PERMITEN SABER LA TRAYECTORIA, SOLO INFORMAN DE LAS RELACIONES DE PROPORCIONALIDAD ENTRE LAS DIFERENTES MAGNITUDES QUE DEFINEN EL MOVIMIENTO, PARA SABER LA TRAYECTORIA NECESITAMOS EL VECTOR DE POSICIÓN EN FUNCIÓN DEL TIEMPO Y REPRESENTARLO EN UN SISTEMA DE EJES DE REFERENCIA X,Y.**

En un movimiento circular además del espacio recorrido hay que tener en cuenta el ángulo descrito en el movimiento, esto nos lleva a diferenciar entre **MAGNITUDES LINEALES**, las que hemos visto hasta ahora y describen el movimiento linealmente y **MAGNITUDES ANGULARES** que dependen de ángulo descrito.
Los ángulos se suelen medir en grados pero en Física se emplea como unidad fundamental para medir ángulos el radian, recuerda que:
UN RADIAN ES AQUEL ÁNGULO CUYO ARCO ES IGUAL A SU RADIO.

ángulo (radianes) $= \dfrac{\text{arco}}{\text{radio}}$ $\qquad \varphi = \dfrac{S}{R}$



Si queremos estudiar este movimiento angularmente **hay que definir una magnitud que indique como va cambiando el ángulo descrito respecto al tiempo a medida que el móvil avanza en su trayectoria circular, esta magnitud recibe el nombre de VELOCIDAD ANGULAR es el ángulo recorrido por unidad de tiempo.**
Como es lógico puede estudiar este cambio en un intervalo, velocidad angular media, o en un instante, velocidad angular instantánea.

SE DEFINE MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME COMO AQUEL CUYA VELOCIDAD ANGULAR ES CONSTANTE

velocidad angular ω (rad/s)

- velocidad angular media $\qquad \omega = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dfrac{\varphi - \varphi_0}{t}$
- velocidad angular instantánea $\qquad \omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$

Como $\varphi = \frac{S}{R}$ despejando $\varphi . R = S$ derivando toda la igualdad respecto al tiempo y como R es constante

$\frac{d\varphi}{dt} . R = \frac{dS}{dt}$ luego queda : $\boxed{\omega . R = V}$

Ecuación lineal del movimiento uniforme : $S = V . t$ **Si hay espacio inicial queda** $S = V . t + S_0$

Ecuación angular del movimiento uniforme : $\varphi = \omega . t$ **Si hay ángulo inicial queda** $\varphi = \omega . t + \varphi_0$

El MCU es un movimiento periódico, ya que las posiciones de la partícula se repiten a intervalos iguales llamados períodos : T

PERÍODO (T) ES EL TIEMPO QUE TARDA EN DAR UNA VUELTA COMPLETA. (se mide en segundos)

FRECUENCIA (f) ES EL NÚMERO DE VUELTAS COMPLETAS POR UNIDAD DE TIEMPO.
(se mide en s^{-1} que reciben el nombre de HERTZIOS ,Hz)

El período y la frecuencia son inversos:

Tiempo (s) $\longrightarrow$ número de vueltas

T (periodo) $\longrightarrow$ 1 vuelta

1 segundo $\longrightarrow$ f (frecuencia)

despejando $T = \frac{1}{f}$

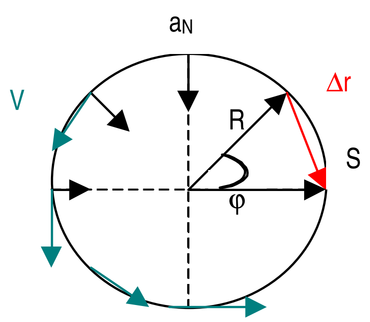
La relación de estas dos magnitudes con la velocidad angular se puede determinar pensando que si el móvil da una vuelta completa recorre un ángulo de 2πrad. y el tiempo que tardó en recorrerlo es el período T luego como la velocidad angular relaciona el ángulo recorrido con el tiempo empleado en recorrerlo :

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Ejemplo: Un disco gira a 300 rpm ,sobre él hay tres cuerpos, el primero a 1 m del centro del disco, el segundo a 2 m y el tercero a 3 m ¿cual gira con más velocidad angular y cual con más velocidad lineal?. Calcúlalas.

c) MOVIMIENTOS CON ACELERACIÓN VARIABLE

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE ACELERADO: MCUA



Como la trayectoria es circular el desplazamiento y la trayectoria no coinciden
Existe aceleración tangencial ya que el módulo de la velocidad varía , y por tanto también la velocidad angular varía.
El ritmo de cambio de la velocidad es constante por lo que la aceleración tangencial es constante.
Como el movimiento es circular la dirección de la velocidad va cambiando por lo que hay aceleración normal y no es constante porque la velocidad va tomando diferentes valores.
La aceleración de este movimiento consta por tanto de sus dos componentes, la aceleración tangencial que es constante porque el módulo de la velocidad varía proporcionalmente al tiempo (es uniformemente acelerado) y la aceleración normal que no es constante porque la velocidad es diferente en cada punto luego el cuadrado de la velocidad entre el radio da diferentes valores en cada punto. Así la aceleración de este movimiento no es constante y se puede obtener a partir de sus dos componentes: $a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$
Por lo tanto si estudiamos linealmente este movimiento responde a las mismas ecuaciones que cualquier movimiento uniformemente

acelerado y las gráficas van a ser las mismas , luego **A PARTIR DE LAS GRÁFICAS S / t Y V/ t NO ES POSIBLE DISTINGUIR UN MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO DE UNO CIRCULAR UNIFORMEMENTE ACELERADO YA QUE NO NOS PERMITEN SABER LA TRAYECTORIA, SOLO INFORMAN DE LAS RELACIONES DE PROPORCIONALIDAD ENTRE LAS DIFERENTES MAGNITUDES QUE DEFINEN EL MOVIMIENTO, PARA SABER LA TRAYECTORIA NECESITAMOS EL VECTOR DE POSICIÓN EN FUNCIÓN DEL TIEMPO Y REPRESENTARLO EN UN SISTEMA DE EJES DE REFERENCIA X,Y.**

Ecuación del movimiento uniformemente acelerado: $S = V_0 . t + \frac{1}{2} . a . t^2$ si hay espacio inicial S_0 se añade

Derivando se obtiene la velocidad $V = \frac{dS}{dt}$ $V = V_0 + a . t$

Aceleración normal o centrípeta : $a_N = \frac{V^2}{R}$

Como $\omega . R = V$ si derivamos todo respecto a t queda $\frac{d\omega}{dt} . R = \frac{dV}{dt}$ teniendo en cuenta que $a_T = \frac{dV}{dt}$

La magnitud que determina el cambio de velocidad angular en función del tiempo se llama aceleración angular α y se mide en rad/s² luego :

$$\alpha . R = a_T$$

aceleración angular α (rad/s²)

- aceleración angular media $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t}$
- aceleración angular instantánea $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

Ecuación lineal del movimiento uniformemente acelerado: $S = V_0 . t + \frac{1}{2} . a . t^2$ si hay espacio inicial S_0 se añade

Ecuación angular del movimiento uniformemente acelerado: $\varphi = \omega_0 . t + \frac{1}{2} . \alpha . t^2$ si hay espacio inicial S_0 se añade

Derivando se obtiene la velocidad $V = \frac{dS}{dt}$ $V = V_0 + a . t$

Derivando se obtiene la velocidad $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ $\omega = \omega_0 + \alpha . t$

ESTE NO ES UN MOVIMIENTO PERIÓDICO YA QUE LA VELOCIDAD CAMBIA CADA VEZ Y TARDA DIFERENTES TIEMPOS EN DAR CADA VUELTA COMPLETA, POR LO TANTO NO TIENE SENTIDO HABLAR EN ESTE MOVIMIENTO DE PERÍODO NI DE FRECUENCIA.

magnitud lineal	=	magnitud angular	por	radio
S (espacio en metros)	=	φ (ángulo en rad)	.	R
V (velocidad en m/s)	=	ω (velocidad angular en rad/s)	.	R
a_T (aceleración tangencial en m/s²)	=	α (aceleración angular en rad/s²)	.	R

Ejemplo: Un móvil se pone en marcha para recorrer una pista circular ,en 10 s alcanza una velocidad de 600 rpm calcula su aceleración angular y el número de vueltas que ha dado en ese tiempo.

4- COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS. PROYECTILES

Cuándo una partícula se encuentra sometida a dos movimientos simultáneos e independientes, el movimiento que realiza es un movimiento compuesto. Dicho de otro modo, hay movimientos en apariencia complejos que se pueden estudiar de forma mucho más simple como superposición de dos movimientos más sencillos. Entonces se habla de **Composición de movimientos**.
Como las velocidades son vectores se pueden sumar y restar vectorialmente, así un cuerpo sometido a dos velocidades distintas se moverá según la resultante de dichas velocidades, de igual forma si hay distintas aceleraciones la aceleración del móvil será la resultante de las aceleraciones existentes.

Ejemplo: Una canoa atraviesa perpendicularmente un río de 100 m de ancho con una velocidad de 10 m/s. La velocidad de la corriente es de 5m/s. Calcular la velocidad real con que se mueve la canoa, en qué dirección se mueve y el tiempo que tarda en llegar a la orilla opuesta. Si la canoa fuese paralela a la orilla en sentido contrario a la corriente ¿con qué velocidad se movería?.

Vamos a estudiar algunos movimientos que se deban a la superposición de movimientos rectilíneos uniformes o uniformemente acelerados.
El caso más corriente de composición de movimientos es el lanzamiento de proyectiles, ya sea vertical, horizontal u oblicuo.

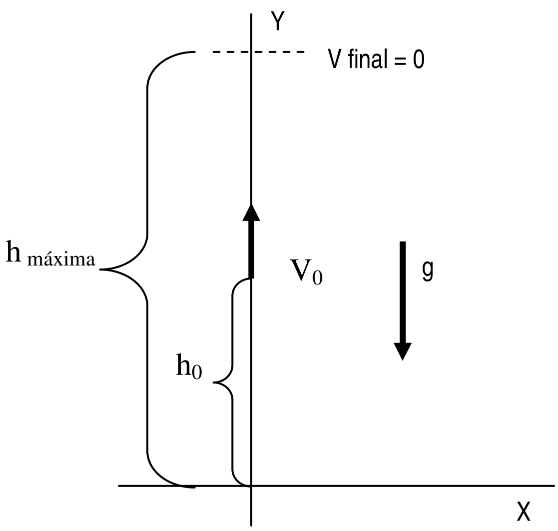
En primer lugar es necesario tener claro que al lanzar un proyectil lo que hacemos es dispararlo con un cierto impulso inicial, es decir, con una cierta **velocidad inicial, desentendiéndonos inmediatamente de él y dejándolo a merced de la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra y le hace caer sometido a la aceleración de la gravedad, $g=9{,}8\ m/s^2$, que es vertical y hacia abajo.**

En todos los casos vamos a considerar despreciable la resistencia del aire.
Debemos establecer en primer lugar un sistema de referencia que mantendremos siempre igual en todos los movimientos, el sistema de referencia más sencillo es aquel que sitúa **EL EJE Y EN LA VERTICAL DEL PUNTO DE LANZAMIENTO Y EL EJE X EN EL SUELO.**

Los lanzamientos los vamos a clasificar según la dirección en que lanzamos (la dirección del vector velocidad inicial) en tiros: verticales, horizontales u oblicuos:

A) TIRO VERTICAL

Tenemos dos movimientos, el debido a nuestro lanzamiento (hacia arriba o hacia abajo) y el de la gravedad que tira del cuerpo hacia abajo. Vamos a ver los vectores de posición que se obtienen cuando el tiro es hacia arriba y cuando es hacia abajo:

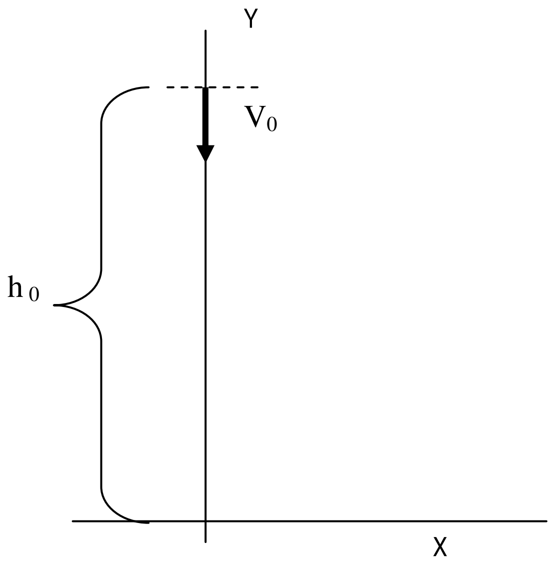


Vectorialmente la aceleración de la gravedad queda: $\mathbf{g = -9{,}8\ j\ m/s^2}$ con el sistema de referencia que hemos tomado.
El cuerpo sube siendo frenado por la atracción gravitatoria terrestre que acaba por pararle y le hace caer. En todo momento la gravedad actúa hacia abajo y es la velocidad la que cambia de sentido (primero sube y luego baja).
Como la aceleración de la gravedad es un valor constante estamos con un movimiento uniformemente acelerado y su ecuación de movimiento es : $S = V_0 . t + \frac{1}{2} . a . t^2$

Como la trayectoria es rectilínea el valor del desplazamiento y el espacio recorrido coinciden por lo que el vector de posición del móvil en cada instante es:

$$r = \left(h_0 + V_0 . t - \frac{1}{2} . g . t^2 \right) j \ (m)$$

y la velocidad se saca derivando: $\mathbf{V = (V_0 - g.t)\ j\ m/s}$



En este caso la velocidad inicial tiene diferente sentido y por lo tanto diferente signo:

$$\mathbf{r} = \left(h_0 - V_0 . t - \frac{1}{2} . g . t^2 \right) \mathbf{j} \ (m)$$

y la velocidad se saca derivando: $\mathbf{V} = (- V_0 - g.t) \ \mathbf{j} \ m/s$

La gravedad acelera en todo momento al movimiento.
Si en lugar de lanzarlo hacia abajo lo dejamos caer la velocidad inicial es cero:

$$\mathbf{r} = \left(h_0 - \frac{1}{2} . g . t^2 \right) \mathbf{j} \ (m)$$

y la velocidad se saca derivando: $\mathbf{V} = (- g.t) \ \mathbf{j} \ m/s$

Ejemplo: Desde un globo que está ascendiendo a una velocidad de 50m/s se suelta un cuerpo para que caiga libremente. Si tarda 20s en llegar al suelo ¿a qué altura estaba el globo en el instante de soltar el cuerpo ?¿Cuanto tardaría en llegar al suelo si suelta el cuerpo cuando el globo desciende esa misma velocidad?.

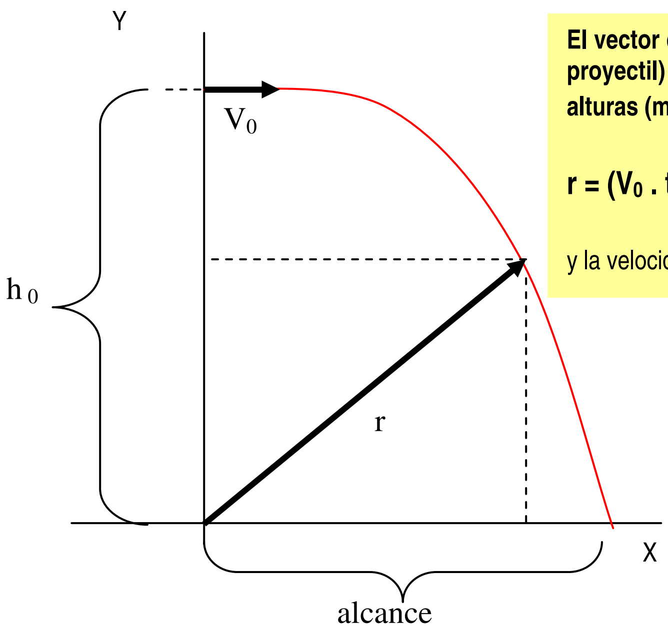
B) <u>TIRO HORIZONTAL:</u>

La velocidad de lanzamiento es horizontal, el cuerpo queda sometido a dos movimientos simultáneos:

1. **SOBRE EL EJE X: (mru)** un movimiento **horizontal rectilíneo y uniforme** debido a la velocidad de lanzamiento, ninguna aceleración actúa horizontalmente, este es el **MOVIMIENTO DE AVANCE** (si no hubiera ninguna otra acción sobre el cuerpo este seguiría indefinidamente en línea recta).

2. **SOBRE EL EJE Y**: **(mrua)** un movimiento **vertical rectilíneo y hacia abajo, sin velocidad inicial porque la velocidad inicial es horizontal y uniformemente acelerado** (aceleración de la gravedad) debido a la atracción que la Tierra ejerce sobre el cuerpo haciéndolo caer, **MOVIMIENTO DE CAÍDA**.

El resultado de ambos movimientos actuando a la vez da lugar a la trayectoria curvilínea que sigue el cuerpo.



El vector de posición tiene componente x (m r u $S = V.t$ avance del proyectil) y componente y donde se mide la caida y por lo tanto las alturas (m ru a sin velocidad inicial $S = S_0 + \frac{1}{2} . a . t^2$) queda:

$$\mathbf{r} = (V_0 . t) \ \mathbf{i} + \left(h_0 - \frac{1}{2} . g . t^2 \right) \mathbf{j} \ (m)$$

y la velocidad se saca derivando: $\mathbf{V} = (V_0) \ \mathbf{i} + (-g.t) \ \mathbf{j} \ m/s$

ALCANCE DEL PROYECTIL : es la distancia horizontal que recorre hasta llegar al suelo. En el suelo la altura es cero luego y=0 entonces: $0 = h_0 - \frac{1}{2} . g . t^2$

sacando el valor de t es posible obtener el alcance $X = V_0 . t$

La trayectoria se obtiene del vector de posición despejando el tiempo de cada, **ES UNA TRAYECTORIA PARABÓLICA.**

$$\left.\begin{aligned} X &= V_0 \cdot t \\ Y &= h_0 - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{aligned}\right\}$$

$\frac{X}{V_0} = t$ sustituyendo en y queda

$$Y = h_0 - \frac{g}{2\,V_0^2} \cdot X^2$$

Ecuación de la trayectoria

Ejemplo: Un avión vuela a una altura de 3 Km y lleva una velocidad de 500m/s ¿a qué distancia del blanco debe soltar una bomba para acertar?.

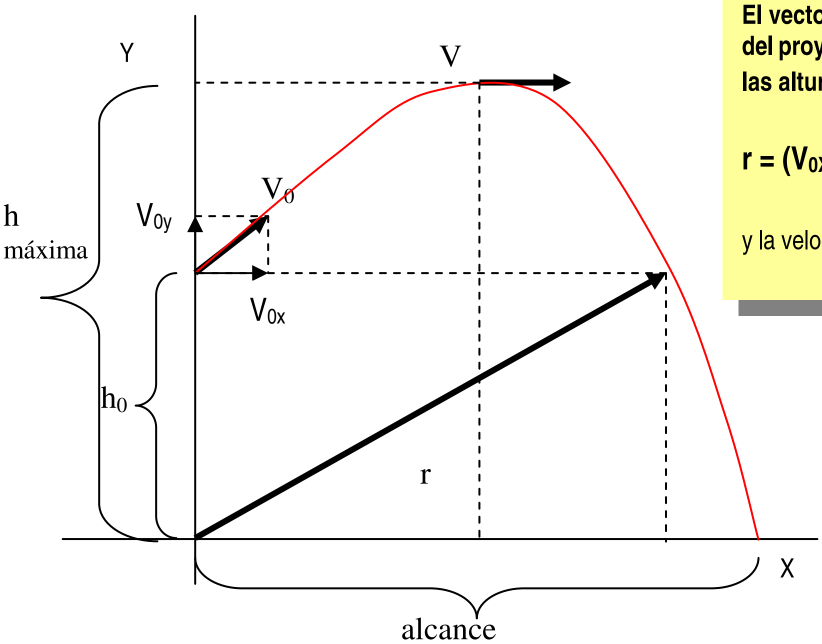
C) TIRO OBLICUO:

Cuando lanzamos un proyectil con un cierto ángulo respecto de la horizontal la velocidad de lanzamiento no es horizontal ni vertical sino oblicua. Como la velocidad inicial con que se lanza el proyectil es oblicua es necesario descomponerla según los ejes de referencia.

1. **SOBRE EL EJE X: (mru)** el movimiento es **horizontal rectilíneo y uniforme** debido a la componente x de la velocidad de lanzamiento (V_{ox}), **MOVIMIENTO DE AVANCE** (si no hubiera ninguna otra acción sobre el cuerpo este seguiría indefinidamente en línea recta)
2. **SOBRE EL EJE Y**: **(mrua) vertical rectilíneo y acelerado**, (aceleración de la gravedad) cuya velocidad inicial es la componente vertical de la velocidad inicial (V_{oy}) ,positiva o negativa según el lanzamiento sea hacia arriba o hacia abajo, debido a la atracción que la Tierra ejerce sobre el cuerpo haciéndolo caer, **MOVIMIENTO DE CAÍDA.**

El resultado de ambos movimientos actuando a la vez da lugar a la trayectoria curvilínea que sigue el cuerpo.

Si el tiro es oblicuo hacia arriba el vector de posición entonces es:



El vector de posición tiene componente x (m r u $S = V \cdot t$ avance del proyectil) y componente y donde se mide la caida y por lo tanto las alturas (m ru a $S = S_0 + V_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$) queda:

$$r = (V_{0X} \cdot t)\, i + \left(h_0 + V_{0Y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2\right) j \ \ (m)$$

y la velocidad se saca derivando: $V = (V_{0X})\, i + (V_{0Y} - g \cdot t)\, j$ **m/s**

ALCANCE DEL PROYECTIL : es la distancia horizontal que recorre hasta llegar al suelo. Al llegar al suelo la altura es cero luego Y =0.

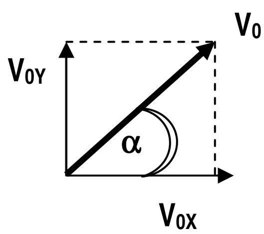
$$h_0 + V_{0Y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado se saca el tiempo: El recorrido en horizontal es X y por tanto con el valor de tiempo obtenido se saca X que es el alcance:

$X = V_{0X} \cdot t$

$V_{0X} = V_0 \cdot \cos\alpha$

$V_{0Y} = V_0 \cdot \operatorname{sen}\alpha$



La trayectoria se obtiene del vector de posición despejando el tiempo, **ES UNA TRAYECTORIA PARABÓLICA.**

$$\left.\begin{array}{l} X = V_{0X} \cdot t \\ \\ Y = h_0 + V_{0Y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{array}\right\}$$

$\frac{X}{V_{0X}} = t$ sustituyendo en y queda

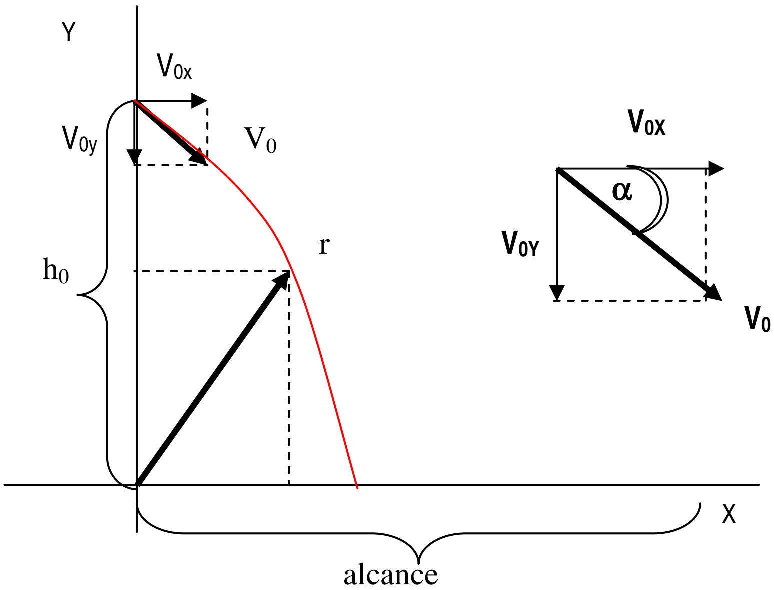
$$Y = h_0 + \frac{V_{0Y}}{V_{0X}} \cdot X - \frac{g}{2\ V_0^2} \cdot X^2$$

Ecuación de la trayectoria

La **ALTURA MÁXIMA** se obtiene teniendo en cuenta que en ese punto el vector velocidad resulta horizontal luego la componente y de la velocidad es cero.

$V_{0Y} - g \cdot t = 0$ de aquí sacamos el tiempo y para determinar la altura vamos a la componente Y del vector de posición que mide las diferentes alturas e introducimos el valor de tiempo obtenido : $Y = h_0 + V_{0Y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

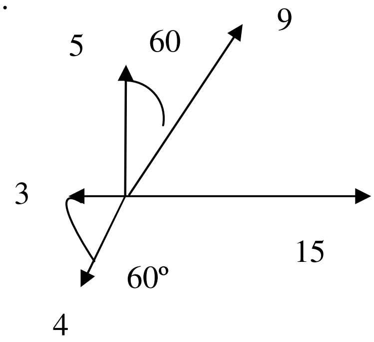
¿Como sería el vector de posición de un tiro oblicuo hacia abajo ?¿y la ecuación de su trayectoria?.



Ejemplo: Se lanza un proyectil con una velocidad de 10 m/s desde una torre de 40 m de altura, obtener el vector de posición del proyectil en función del tiempo y a partir de él obtener el alcance del proyectil, su altura máxima, la velocidad con que llega al suelo, su posición cuando t= 1s y el ángulo de su trayectoria con la horizontal en ese instante si: a) El tiro es horizontal. b) Se lanza el proyectil hacia arriba con un ángulo de 30 º respecto a la horizontal. c) Se lanza el proyectil con el mismo ángulo que en el apartado anterior respecto a la horizontal pero hacia abajo.

hoja 1 PROBLEMAS DE CÁLCULO VECTORIAL 1º bachillerato

1.Obtén el módulo del vector resultante de los vectores del dibujo:



2.Dos vectores a y b vienen expresados por a=3i+4j+k y b=4i-5j+8k calcula el módulo de estos vectores,
el módulo del vector suma y del vector resta de los dos.
Determina un vector unitario en la dirección de b.

3.Dados los vectores a= 2i+3j y b=4i-2j dibujalos en los ejes y calcula su suma gráfica y numéricamente.
Calcula el módulo de ambos vectores y el de su suma y haz su producto vectorial.

4. Los vectores a y b forman un ángulo de 60º, el módulo de a es 5 y el de b es 4:
Calcula a+b, obtén un vector unitario en la misma dirección y sentido que a,;
Otro vector unitario en la misma dirección y en sentido contrario que b.
Haz otra vez a+b suponiendo que b forma un ángulo de 30º con el eje x.

5.Halla el vector resultante de dos vectores aplicados a un punto y que valen respectivamente 9 y 12 m/s
si forman entre si un ángulo de: a)30º b)45º c)90º y c)180º

6.Obtén para t=0, para t=1 y para t=2 el módulo del vector $a=(2t^3+3t)i +(t^2-8)j+5k$

7.El vector resultante de dos perpendiculares tiene por módulo 10 si uno de los vectores vale 8 ¿cuál es el
módulo del otro vector?

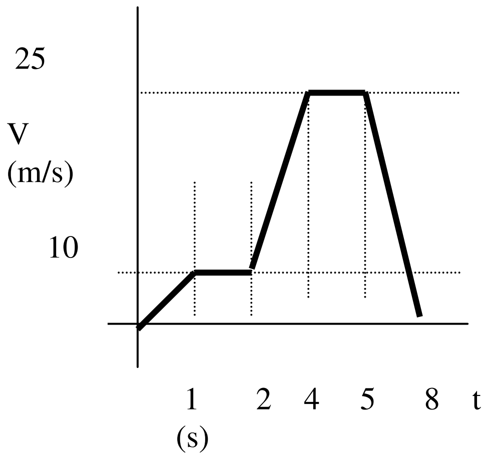
8.Descomponer un vector cuyo módulo es 100 en dos componentes perpendiculares tales que sus módulos sean iguales.

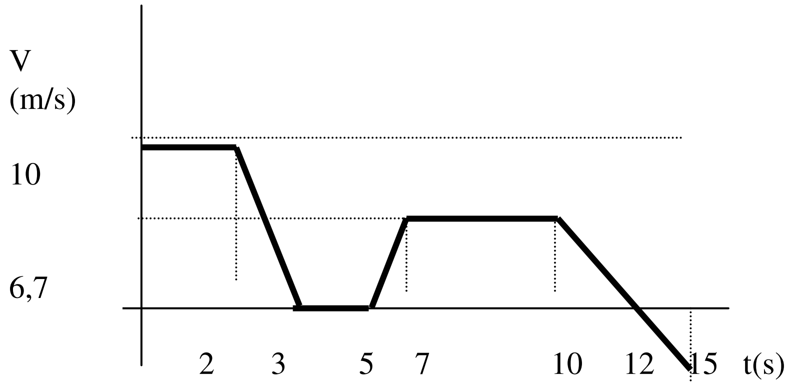
9.Dados los vectores a=3i+2j-5k, b=6i-4j y c=7j+4k calcula r=3a+b-c . Calcula también a.b

10.Dibuja ,halla las componentes de cada uno de estos vectores y su suma: a tiene por módulo 2 y ángulo con el eje x 40º y b tiene por módulo 4 y ángulo con el eje x 127º.

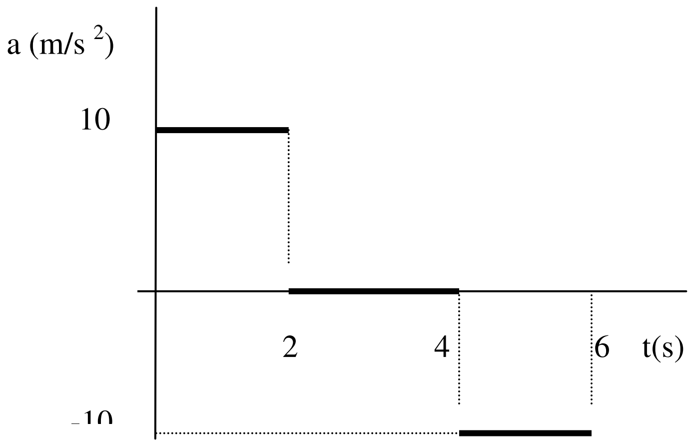
Hoja 2 Problemas: **MOVIMIENTOS Y GRÁFICAS**

1. El vector de posición de una partícula viene dado por la expresión $r=(t+5)i+(t^2+4t+1)j$ calcula la ecuación de la trayectoria del cuerpo, la velocidad del móvil para t=5 s y la aceleración del móvil. ¿Qué podemos decir de este movimiento?.
2. Un punto móvil tiene de coordenadas $x=5+t$, $y=4t^2-t+1$ en el S.I. calcular a)la velocidad media en el intervalo $t_1=2$ s, $t_2=5$s, b)La velocidad inicial, c)La ecuación de la trayectoria.
3. La ecuación del movimiento rectilíneo de un cuerpo viene dada por la expresión: $s = 3t^2+4t+1$ a) ¿Cual es la expresión de la velocidad?. ; b) ¿Puedes expresarla en forma vectorial? ; c) ¿Tiene aceleración? , ¿de qué tipo? , ¿puedes calcularla? , ¿y expresarla en forma vectorial?. ; d) ¿Cual es su velocidad inicial? ; e) Calcula su velocidad y aceleración, si la hay, en t= 5s. ; f) Calcula la aceleración media entre t=1s y t=2s. ; g) Representa las gráficas del movimiento. ¿Qué conoces sobre él?.
4. El vector de posición de un móvil es: $\mathbf{r} = 3t^2.\mathbf{i} + (2t+1).\mathbf{j}$. Calcula para t= 3 s : a) El vector velocidad y su módulo. b) El vector aceleración y su modulo. e) Indica lo que conoces sobre el movimiento y clasifícalo. f) Representa las gráficas del movimiento.
5. El vector de posición de un móvil es $\mathbf{r} = t^3\mathbf{i}-4t^2\mathbf{j}+(3t-2)\mathbf{k}$ m . Calcula el vector velocidad instantánea en el momento en que su aceleración es de 10 m/s^2.
6. Dadas las ecuaciones de un movimiento $x=2t+1$, $y=t^2+2$, $z=t$ determinar la velocidad media entre t= 2 s y t=3 s .La velocidad y la aceleración para t= 1s .Determinar también las componentes de un vector unitario tangente a la trayectoria para cualquier instante y para t=1 s.
7. La ecuación de un movimiento es $S=6t^3-8t^2+2t-5$ m calcula el espacio recorrido al cabo de 3s y la velocidad y la aceleración en ese momento ¿qué espacio recorre el móvil durante el tercer segundo y cual es su aceleración en este intervalo?
8. ¿En qué instante tendrán la misma velocidad don móviles cuyas respectivas ecuaciones de movimiento son $S_1=3t^2+5t+6$ y $S_2=6t+8$ m?
9. Un móvil se desplaza según el vector $r=(t^3+t+2)i +(t+1) j$ m determina su aceleración media entre t=1 y t=3 s así como su aceleración instantánea para t=1 s.
10. Calcula para t=1 s la aceleración sabiendo que la velocidad del móvil es $V= 3t\, i+4j$ m/s
11. Un móvil que parte con velocidad inicial de 40 m/s, durante los primeros 10 s recibe una aceleración negativa de 4 m/s^2 y a los 5 s siguientes una aceleración negativa de 2 m/s^2 calcular la distancia recorrida respecto al punto de partida a los 15 s y su velocidad final. Dibuja las gráficas v/t y s/t correspondientes.
12. Partiendo del reposo un móvil adquiere en 16 s una velocidad de 60m/s de la siguiente forma: los primeros 6 s sigue un movimiento uniformemente acelerado y el resto un movimiento uniforme, calcular la aceleración del cuerpo y el espacio total recorrido.
13. El movimiento rectilíneo de unos móvil viene descrito por las siguientes gráficas, indica en cada una: a)Qué tipo de movimiento lleva el móvil en cada tramo. b) Que espacio total recorre. c) El espacio y la aceleración en cada etapa. d) Dibuja las gráficas a frente a t y posición frente a t.





14. Una partícula inicialmente en reposo se somete a estas aceleraciones.Dibuja las gráficas posición tiempo y velocidad tiempo y calcula el espacio máximo recorrido.



15. Dos móviles se mueven siguiendo una trayectoria rectilínea entre dos puntos A y B situados a 110m uno de otro. El primero sale de A sin velocidad inicial y se dirige hacia B con una aceleración constante de 4 m/s^2. El segundo sale de B dos segundos más tarde y se dirige hacia A con una velocidad constante de 20 m/s. Calcula en que punto se encontrarán. Dibuja las gráficas espacio-tiempo de ambos móviles.

16. Un hombre corre con una velocidad constante de 6 m/s para alcanzar un tren que está a punto de partir. Cuando se encuentra en el andén a 32 m de la escalerilla del vagón de cola, el tren arranca con una aceleración constante de 0,5 m/s ¿conseguirá el hombre alcanzar al tren?. Dibuja las gráficas posición tiempo y velocidad tiempo para ambos indicando el punto de encuentro si lo hay.

17. Un automóvil se desplaza por una carretera a 100 Km/h. En un instante dado , el conductor observa una roca desprendida en medio de la carretera a 200 m delante de su vehículo. Si tarda 2 s en frenar ¿con qué aceleración constante debe frenar para detenerse a 5 m de la roca.

18. Un automotor parte del reposo y se mueve en una via circular de 400 m de radio con movimiento uniformemente acelerado. A los 50 s de iniciada la marcha la velocidad es de 72 Km/h desde ese momento conserva esa velocidad. Calcular: a) La aceleración en la primera fase del movimiento. b)La aceleración normal, la aceleración total y la longitud de vía recorrida a los 50 s. c) La velocidad angular media en la primera etapa. d) La velocidad angular al final de los 50 s. e)El tiempo que tardará en dar 100 vueltas al circuito.
19. Un ventilador gira con velocidad angular constante a razón de 20 rps. Calcula: a) La velocidad lineal del extremo de una de sus aspas que describe una circunferencia de 15 cm de radio. b) La longitud del arco recorrido por este punto en 4 h de funcionamiento del ventilador.
20. Una rueda que gira a razón de 1500 r.p.m. se detiene con aceleración angular constante. Calcula su aceleración de frenado y el tiempo que ha tardado en pararse sabiendo que durante el movimiento de frenado ha dado 25 vueltas.
21. Una rueda gira a razón de 800 rad/min. Calcula la velocidad lineal de un punto situado a 6 cm del eje y de otro situado a 30 cm del eje. ¿Cual es la aceleración centrípeta de dichos puntos?.
22. Un móvil puntual describe una circunferencia de 40 cm de radio. Partiendo del reposo se mueve con una aceleración angular constante de 0,05 rad/s^2. Calcula su aceleración normal, aceleración tangencial y aceleración total al cabo de 4 s.
23. Sea un disco que gira a 45 rpm, calcula la velocidad angular y lineal de todos los puntos del disco que disten a 1cm del centro de rotación, calcula también la velocidad lineal y angular de los puntos que distan 5 cm del centro ¿quienes tienen mayor aceleración normal?, calcúlala. Calcula el período y la frecuencia de este movimiento.
24. Un tren eléctrico da vueltas por una pista circular de 50 cm de radio con una velocidad constante de 10 cm/s calcular su velocidad angular, su aceleración normal, su período, su frecuencia y el número de vueltas que da en 10s.
25. Un volante gira a razón de 60rpm y adquiere al cabo de 5 s una velocidad de 12□ rad/s cual es su aceleración angular y cuantas vueltas dio en ese tiempo?.
26. La velocidad de un volante disminuye uniformemente desde 900rpm a 800rpm en 5s ,encontrar, en un punto de la periferia del volante la aceleración angular, el número de vueltas que da en 5 s y el tiempo que tarda en pararse. ¿Cambiarían los resultados anteriores si hacemos los mismos cálculos pero respecto a otro punto situado en el interior?

Hoja 3 Problemas: **COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS Y ENCUENTROS**

1) Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba desde una altura de 50 m y se observa que tarda 15 s en llegar al suelo: a)¿Con qué velocidad se lanzó?. b) ¿qué velocidad tiene 2 s antes de llegar al suelo? c) ¿Con qué velocidad llega al suelo?. d)¿Qué altura alcanza?. Realiza el problema empleando el vector de posición de este movimiento situado en el suelo.

2) Un globo está ascendiendo a razón de 12 m/s hasta una altura de 80 m momento en que suelta un objeto ¿cuánto tiempo tardará el objeto en llegar al suelo?. Si el globo desciende con la misma rapidez y suelta el objeto desde la misma altura ¿tardará el mismo tiempo en llegar al suelo?.

3) Desde lo alto de una torre se deja caer una piedra sin velocidad inicial y dos segundos después se lanza otra piedra desde la misma posición con una velocidad inicial de 25 m/s, calcula la altura de la torre y la velocidad final de cada una sabiendo que llegan simultáneamente al suelo.

4) Un objeto es lanzado desde el suelo hacia arriba con una velocidad de 20 m/s y 2 s después es lanzado otro objeto desde una altura de 30 m hacia abajo con una velocidad de 10m/s. Escribe los vectores de posición y velocidad de cada tiro. Determina a qué altura se encuentran y la velocidad que lleva cada uno en el momento del encuentro. ¿Cómo está cada uno en el momento del encuentro subiendo o bajando?

5) Dos proyectiles se lanzan hacia arriba con un segundo de intervalo e igual velocidad inicial de 40m/s ¿donde, cuando y con qué velocidad se encuentran?.

6) Dos proyectiles se lanzan verticalmente hacia arriba con 2 s de intervalo, el primero con velocidad inicial de 50 m/s y el segundo de 80 m/s, calcula el tiempo transcurrido hasta que los dos se encuentran a la misma altura, el valor de esa altura y la velocidad de ambos en ese momento.

7) Un avión que vuela a una altura de 4 Km y con una velocidad de 100Km/h lanza una bomba escribe el vector de posición y determina el alcance del tiro y la velocidad que lleva al chocar contra el suelo.

8) Desde un punto situado a 100 m sobre el suelo se dispara horizontalmente un proyectil con una velocidad de 400m/s ¿cual será el alcance y con qué velocidad llegará al suelo?.

9) Desde la terraza de un edificio de 50 m de altura se lanza horizontalmente una piedra con una velocidad de 5 m/s ¿qué anchura mínima debe tener la calle para que la piedra no choque con ninguno de los edificios de en frente y qué tiempo tardará en llegar al suelo?.

10) Se dispara un cañón con una inclinación de 45º con respecto a la horizontal y con una velocidad inicial de 490 m/s calcula: a) el alcance, la altura máxima y el tiempo empleado en alcanzarla. b) La posición del móvil y su velocidad al cabo de 2 s de efectuado el disparo. c) Suponiendo que el cañón está colocado en la cima de un acantilado de 50 m de altura determinar el tiempo que tarda el proyectil en llegar a la superficie del mar, la posición del impacto, la velocidad en ese instante y el tiempo transcurrido desde que se efectúa el disparo hasta que se oye el sonido del choque con el agua en el punto de lanzamiento. Velocidad del sonido 330m/s.

11) Se dispara un cañón con un ángulo de 15º y una velocidad de 200 m/s ,calcular el alcance de la bala y la velocidad con que llegaría a tierra. Si hay una colina de 300 m de altura a la mitad de su alcance ¿tropezará con ella? Justifica tu respuesta.

12) Se lanza un cuerpo oblicuamente hacia arriba con una velocidad inicial de 32 m/s que forma un ángulo de 30º con la horizontal. ¿A qué distancia del punto de partida caerá si el suelo es horizontal? ¿Cual será su velocidad 2 s después de lanzado?. Calcula la máxima altura alcanzada.

13) Desde un punto elevado 150 m sobre el suelo, se dispara horizontalmente un proyectil con una velocidad de 300 m/s. a) ¿Cuales son los vectores de posición, velocidad y aceleración del movimiento?. b) ¿Cuánto tiempo tardará en caer al suelo?. c) ¿Con qué velocidad llegará al suelo?. d) Cuanto vale su velocidad cuando lleva en el aire 1/5 del tiempo total de vuelo?.

14) Un muchacho intenta pasar una piedra sobre una valla situada a 10m de distancia lanzándola con una velocidad inicial de 20 m/s en una dirección que forma un ángulo de 45º con la horizontal. Calcula si logrará su propósito sabiendo que la valla tiene una altura de 8 m sobre el punto de lanzamiento de la piedra.

15) Se lanza un proyectil con una velocidad inicial de 600 m/s y un ángulo de tiro de 60º se pide el tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima , la altura 3 s después de su lanzamiento, el ángulo de la trayectoria respecto a la horizontal en ese momento y a qué distancia se encuentra el proyectil del punto de partida a los 50s.

16) Al efectuar una jugada en una partida de frontón, un jugador imprime a la pelota una velocidad de 13 m/s con un ángulo sobre la horizontal de 30º, si al golpear la pelota esta se encuentra a 50 cm del suelo y a 10 m de la pared del frontón calcular la altura medida desde el suelo en que la pelota golpea la pared, el tiempo que tarda en hacerlo y la velocidad que lleva cuando choca con la pared.

17) Una pelota resbala por un tejado que forma un ángulo 30º con la horizontal y al llegar al extremo queda en libertad con una velocidad de 10 m/s, la altura del edificio es de 60 m calcular: la ecuación del movimiento de la pelota cuando queda en libertad, el tiempo que tarda en llegar al suelo y la velocidad con que llega.

18) Un avión que vuela a 100Km/h y a una altura de 2 Km lanza un proyectil contra la Base enemiga pero en ese mismo instante un cañón enemigo, situado en el suelo justo debajo del avión ,dispara una bala para interceptar el proyectil y lo consigue justo 10 s antes de que alcance su objetivo ¿con qué velocidad fue lanzada la bala, con qué ángulo y en qué punto se produjo la colisión?.

19) Dos equipos de baloncesto se encuentran empatados a puntos quedando breves instantes para que finalice el partido, de repente un jugador lanza el balón a canasta con una velocidad inicial de 8 m/s formando un ángulo con la horizontal de 30º. La canasta está a 3m de altura sobre un punto que dista 5 m del jugador. Indica si su equipo habrá ganado el partido sabiendo que el jugador con los brazos estirados lanzó el balón desde una altura de 2,71 m.

20) Se golpea una pelota de golf de manera que su velocidad inicial forma un ángulo de 45º con la horizontal. La pelota alcanza el suelo a una distancia de 180 m del punto en el que se lanzó. Calcular su velocidad inicial y el tiempo durante el cual ha estado en el aire.

21) En un terreno se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 10 m/s .El viento produce un fuerza horizontal constante sobre la pelota que es igual a la quinta parte del peso de esta. Hallar: a) La distancia entre el punto de lanzamiento y el punto de caída. b)La velocidad de la pelota en el punto más alto de la trayectoria c)La altura máxima que alcanza la pelota .d)La velocidad de la pelota en el momento de llegar al suelo .e)El ángulo que forma la velocidad cuando choca contra el suelo.

22) Un jugador de baloncesto lanza hacia delante la pelota a un compañero situado a 30 m de él. Dicho compañero corre con velocidad constante para alcanzar la pelota y lo consigue cuando esta se encuentra a 1,5 m del suelo. Si el que lanza lo hace desde un altura de 2 m con un ángulo de inclinación de 30º respecto a la horizontal y con una velocidad de 20m/s determina: el vector de posición y el vector velocidad del tiro , la altura máxima del tiro, el tiempo de vuelo hasta que es alcanzada la pelota, la velocidad que lleva al ser alcanzada y la velocidad que lleva el compañero que recoge la pelota.